

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Теория оптимизации
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	А1360: Передовые методы искусственного интеллекта Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
курс:	2
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составили:

А.Г. Бирюков, канд. физ.-мат. наук, доцент

В.Г. Жадан, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 12.02.2024

Аннотация

Изложение материала достаточно традиционное для многих современных курсов методов конечномерной оптимизации. Вначале приводятся некоторые сведения из выпуклого анализа, необходимые для формулировки последующих результатов. После этого рассматриваются собственно задачи оптимизации в различных постановках, включая задачи с несколькими критериями. Для них формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности, излагается теория двойственности.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Изучение основ выпуклого анализа, теории и методов решения различных оптимизационных задач в конечномерных пространствах.

Задачи дисциплины

- овладение студентами начальных сведений по теории выпуклых множеств и выпуклых функций;
- приобретение теоретических знаний по условиям оптимальности для задач безусловной и условной оптимизации, линейного и выпуклого программирования;
- ознакомление студентов с основными современными методами решения конечномерных оптимизационных задач;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических и экспериментальных исследований в области решения практических оптимизационных задач, в том числе с привлечением пакетов оптимизации.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия и основные теоретические результаты в области теории и методов оптимизации в конечномерных пространствах;
- современные проблемы соответствующих разделов численных методов решения оптимизационных задач;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла «Методы оптимизации»;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных оптимизационных задач.

уметь:

- понять поставленную оптимизационную задачу и провести ее формализацию;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных оптимизационных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждения;
- самостоятельно находить алгоритмы решения оптимизационных задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представлять математические знания в области методов оптимизации в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками решения оптимизационных задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых разделов методов оптимизации;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов теории оптимизации;
- предметным языком теории и методов оптимизации, навыками грамотного описания решения соответствующих задач и представления полученных результатов.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Постановки задач оптимизации и их классификация.	2	2		6
2	Выпуклые множества и их основные свойства.	7	7		6
3	Выпуклые функции и их основные свойства.	4	4		6
4	Условия оптимальности для задач безусловной минимизации.	4	4		6
5	Условия оптимальности для выпуклых задач.	4	4		6
6	Условия оптимальности для общих задач математического программирования.	4	4		6
7	Теория двойственности для задач математического программирования.	5	5		9
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 3 (Осенний)

1. Постановки задач оптимизации и их классификация.

Постановка задач оптимизации Локальный и глобальный экстремумы. Классификация экстремальных задач. Примеры оптимизационных задач.

2. Выпуклые множества и их основные свойства.

Определение выпуклых множеств и их основные частные случаи.

Выпуклые множества. Пересечение и линейная комбинация выпуклых множеств, их свойства. Конус, выпуклый конус. Аффинное множество, две формы представления аффинного множества. Выпуклая, неотрицательная и аффинная комбинация точек. Выпуклая, коническая и аффинная оболочки множеств. Их связь с комбинациями точек.

Топологические свойства выпуклых множеств.

Внутренность, относительная внутренность и замыкание выпуклого множества. Относительная граница множества. Свойства относительной внутренности выпуклого множества.

Отделимость выпуклых множеств и проектирование.

Отделимость множеств. Свойства отделимости выпуклых множеств. Опорная гиперплоскость. Существование опорной гиперплоскости. Проекция точки на множество. Свойства проекций.

Понятие сопряженного множества.

Сопряженное множество. Второе сопряженное множество. Их свойства. Сопряженный конус и сопряженное линейное подпространство. Конус, двойственный к сумме конусов, и конус, сопряженный к пересечению конусов.

Многогранные множества и системы линейных равенств и неравенств.

Многогранные множества, полиэдры. Множество, сопряженное к многогранному множеству. Системы линейных равенств и неравенств. Теоремы об альтернативах. Лемма Фаркаша. Линейные матричные неравенства.

3. Выпуклые функции и их основные свойства.

Определение и основные свойства выпуклых функций.

Выпуклые, строго выпуклые и сильно выпуклые функции. Множество подуровня выпуклой и сильно выпуклой функции. Эпиграф функции, свойства эпиграфа выпуклой функции. Непрерывность и дифференцируемость по направлению выпуклой функции. Дифференциальные критерии выпуклой (сильно выпуклой) функции. Субдифференциал выпуклой функции.

Сопряженные и полярные функции.

Сопряженные и полярные функции, их свойства. Неравенства Юнга–Фенхеля и Минковского–Малера. Индикаторная и опорная функция выпуклого множества.

4. Условия оптимальности для задач безусловной минимизации.

Теорема Вейерштрасса и её следствия. Условия оптимальности для выпуклых задач минимизации в терминах субдифференциалов. Касательное направление, касательный конус. Конус возможных направлений. Их свойства. Теорема о необходимом условии экстремума в терминах производных по касательному направлению. Необходимое и достаточное условие экстремума для выпуклой задачи в терминах производных по направлению.

5. Условия оптимальности для выпуклых задач.

Необходимое и достаточное условия экстремума дифференцируемой функции на выпуклом множестве. Вариационное неравенство. Необходимые и достаточные условия экстремума для задачи безусловной минимизации.

6. Условия оптимальности для общих задач математического программирования.

Необходимые и достаточные условия оптимальности для задач математического программирования. Условия Каруша–Куна–Таккера. Достаточные условия второго порядка. Условия регулярности ограничений. Необходимые и достаточные условия оптимальности для выпуклой задачи математического программирования. Регулярная и нерегулярная задачи математического программирования.

7. Теория двойственности для задач математического программирования.

Седловая точка функции Лагранжа. Теория двойственности для задач математического программирования. Задача линейного программирования и двойственная к ней. Собственные и несобственные задачи математического программирования. Двойственность для несобственных задач линейного программирования.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Необходимое оборудование для лекций: компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

Методы оптимизации [Текст]. Ч. 1 : Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации : учеб. пособие для вузов / В. Г. Жадан ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2014 .— 271 с.

Методы оптимизации [Текст]. Ч. 2 : Численные алгоритмы : учеб. пособие для вузов / Жадан, В. Г. ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2015 .— 320 с.

Дополнительная литература

Методы оптимизации. Условия оптимальности в экстремальных задачах [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. Г. Бирюков ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2010 .— 225 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://www.mou.mipt.ru>

<http://life-prog.ru/optimization/php>

<http://www.optimization-on-line.org/>

<http://simplemax.net/>

<http://www.convexoptimization.com/>

<http://www.mou.mipt.ru>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекциях используется компьютер и мультимедийное оборудование (проектор, звуковая система),

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике. Успешное освоение дисциплины требует:

- посещения студентом всех видов аудиторных занятий;

- ведения конспекта в ходе лекционных занятий;
- качественной самостоятельной подготовки к практическим занятиям, активной работы на них;
- активной самостоятельной и аудиторной работы студента;
- своевременной сдачи преподавателю заданий по аудиторным видам работ.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: АІ360: Передовые методы искусственного интеллекта
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра математических основ управления
курс: 2
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 3 (осенний) - Экзамен

Разработчики:

А.Г. Бирюков, канд. физ.-мат. наук, доцент

В.Г. Жадан, д-р физ.-мат. наук, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория оптимизации» обучающийся должен:

знать:

- фундаментальные понятия и основные теоретические результаты в области теории и методов оптимизации в конечномерных пространствах;
- современные проблемы соответствующих разделов численных методов решения оптимизационных задач;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла «Методы оптимизации»;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных оптимизационных задач.

уметь:

- понять поставленную оптимизационную задачу и провести ее формализацию;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных оптимизационных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждения;
- самостоятельно находить алгоритмы решения оптимизационных задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представлять математические знания в области методов оптимизации в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками решения оптимизационных задач (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых разделов методов оптимизации;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов теории оптимизации;
- предметным языком теории и методов оптимизации, навыками грамотного описания решения соответствующих задач и представления полученных результатов.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Определения локального и глобального минимума. Точки строгого и острого минимума.
2. Классы экстремальных задач и их примеры. Задача безусловной и условной минимизации. Задачи линейного и выпуклого программирования. Классическая и общая задачи математического программирования.
3. Дать определение выпуклого множества. Показать, что пересечение и линейная комбинация выпуклых множеств есть также выпуклое множество. Привести примеры линейных комбинаций множеств.
4. Дать определение выпуклого конуса и аффинного множества. Какие два способа представления аффинного множества известны?

5. Выпуклая, коническая и аффинная оболочки множеств. Их связь с комбинациями точек. Что утверждает теорема Каратеодори о минимальном количестве точек в их выпуклой комбинации?
6. Что такое внутренние и относительно внутренние точки множеств? Всегда ли существует внутренность и относительная внутренность у выпуклого множества?
7. Как связаны относительные внутренности и аффинные оболочки выпуклого множества и его замыкания?
8. Дать определение проекции точки на множество. Показать, что проекция точки на замкнутое выпуклое множество всегда существует и единственна.
9. Привести основные неравенства, связывающие проекцию точки на выпуклое множество с остальными точками этого множества.
10. Дать определения понятий отделимости двух множеств (просто отделимости, собственной отделимости, строгой отделимости и сильной отделимости). Привести критерии сильной и собственной отделимости двух выпуклых множеств.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Сформулировать условия отделимости, а также строгой и сильной отделимости точки от выпуклого множества.
2. Дать определение опорной и собственной опорной гиперплоскости. Показать, что в любой граничной (относительно граничной) точке выпуклого множества всегда существует опорная (собственно опорная) гиперплоскость.
3. Дать определение сопряженного и второго сопряженного множества к произвольному множеству. Привести их основные свойства. Показать, что второе сопряженное множество к выпуклому замкнутому множеству, содержащему начало координат, совпадает с ним самим.
4. Дать определение сопряженного конуса. Чему равняются сопряженные конусы к сумме выпуклых конусов и их пересечению? Какой вид имеет сопряженный конус к выпуклому конусу, порожденному столбцами матрицы?
5. Что такое многогранное и полиэдральное множество? Всегда ли сопряженное множество к многогранному множеству является полиэдральным и наоборот?
6. Системы линейных равенств и неравенств. Что такое альтернативная система к заданной системе? Уметь построить альтернативную систему к заданной неоднородной системе с помощью сопряженных конусов. В чем заключается утверждение леммы Фаркаша?
7. Что такое линейное матричное неравенство?
8. Дать определения выпуклых, строго выпуклых и сильно выпуклых функций. Привести неравенство Йенсена. Показать, что функция выпукла тогда и только, когда ее эпиграф есть выпуклое множество. Показать, что у выпуклой функции все множества подуровня (множества Лебега) выпуклы, причем у сильно выпуклых функций они ограничены. Всегда ли выпукла функция, у которой все множества подуровня выпуклы?
9. Знать, что выпуклая функция непрерывна на относительной внутренности своей эффективной области. Что такое эффективная область функции?
10. Привести результат о существовании производных по направлению у выпуклых функций. В случае, когда функция дифференцируема или дважды дифференцируема, привести критерии ее выпуклости.
11. Что такое субдифференциал выпуклой функции. Всегда ли существует субдифференциал у выпуклой функции? Чему равен субдифференциал суммы выпуклых функций?
12. Что такое индикаторная и опорная функции выпуклого множества? Какой вид имеет субдифференциал индикаторной функции? Чему равен условный субдифференциал выпуклой функции на выпуклом множестве?
13. В чем заключается понятие сопряженной функции и второй сопряженной функции? Показать, что вторая сопряженная функция к произвольной функции совпадает с ее выпуклой оболочкой. Привести неравенство Юнга-Фенхеля и привести примеры сопряженных функций.
14. В чем заключается понятие полярной функции? Привести неравенство Минковского-Малера и привести примеры полярных функций.
15. Теорема Вейерштрасса для непрерывных и полунепрерывных снизу функций, ее следствия.

Пример экзаменационных билетов:

Билет №1

1. Что такое субдифференциал выпуклой функции. Всегда ли существует субдифференциал у выпуклой функции? Чему равен субдифференциал суммы выпуклых функций?
2. Дать определение сопряженного конуса. Чему равняются сопряженные конусы к сумме выпуклых конусов и их пересечению? Какой вид имеет сопряженный конус к выпуклому конусу, порожденному столбцами матрицы?

Билет №2

1. Дать определения выпуклых, строго выпуклых и сильно выпуклых функций. Привести неравенство Йенсена. Показать, что функция выпукла тогда и только, когда ее эпиграф есть выпуклое множество. Показать, что у выпуклой функции все множества подуровня (множества Лебега) выпуклы, причем у сильно выпуклых функций они ограничены. Всегда ли выпукла функция, у которой все множества подуровня выпуклы?
2. Дать определение опорной и собственной опорной гиперплоскости. Показать, что в любой граничной (относительно граничной) точке выпуклого множества всегда существует опорная (собственно опорная) гиперплоскость.

Критерии оценивания

Оценка "Отлично" (10) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продемонстрирован грамотный подход к решению задач, реализованы оптимальные алгоритмы, код оформлен в едином удобочитаемом стиле.

Оценка "Отлично" (9) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продемонстрирован грамотный подход к решению задач, реализованы оптимальные алгоритмы.

Оценка "Отлично" (8) - полностью и вовремя решены все задачи без ошибок. Продемонстрирован грамотный подход к решению задач.

Оценка "Хорошо" (7) - полностью решены все задачи. Допущены несущественные ошибки.

Оценка "Хорошо" (6) - полностью решено большинство задач. В некоторых задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Хорошо" (5) - полностью решено две трети задач. В некоторых задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Удовлетворительно" (4) - полностью решено более половины задач. В остальных задачах допущены и не исправлены ошибки, либо некоторые задачи решены частично.

Оценка "Удовлетворительно" (3) - полностью решено более половины задач.

Оценка "Неудовлетворительно" (2) - решено менее половины задач.

Оценка "Неудовлетворительно" (1) - не решено ни одной задачи.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Экзамен может проводиться по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий и других видов работ, предусмотренных программой дисциплины и (или) путем организации специального опроса, проводимого в устной и (или) письменной форме.

При проведении устного экзамена обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету не должен превышать одного астрономического часа.

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, конспектами лекций или другими материалами.